UNIVERSITE PAUL SABATIER
L1 PCP

Année Universitaire 2011 -2012
Lundi 13 février 2012

# Contrôle continu de mécanique

*L'usage des calculatrices est interdit.*

**(Durée : 30 minutes)**

| **NOM :** | **Prénom :** | **Groupe :** | ***Note (/20) :*** |
|---|---|---|---|

## 1- Exercice :

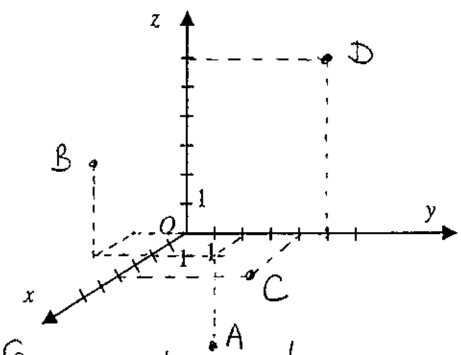
$O$ étant l'origine d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$, la position d'un point $M$ de l'espace peut être caractérisée par différents triplets de nombres :

- le triplet cartésien : $x$, $y$, $z$ dans la base cartésienne $\mathcal{B}_{ca}=\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.
- le triplet cylindrique : $\rho$, $\varphi$, $z$ dans la base cylindrique $\mathcal{B}_{cy}=\left(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{e_z}\right)$.

a) **Exprimer**, de manière générale, $\rho$, $\varphi$, $z$ en fonction de $x$, $y$ et $z$, puis $x$, $y$, $z$ en fonction de $\rho$, $\varphi$ et $z$.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

b) **Positionner très précisément** sur le schéma ci-contre les points $A(2,2,-3)_{\mathcal{B}_{ca}}$, $B(2,-2,3)_{\mathcal{B}_{ca}}$, $C\left(4\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},0\right)_{\mathcal{B}_{cy}}$ et $D\left(5,\dfrac{\pi}{2},6\right)_{\mathcal{B}_{cy}}$ (Les coordonnées sont données en unité S.I., l'unité étant reportée sur chacun des axes ci-dessous).




$\rho_C = 4\sqrt{2}$ , $\varphi_C = \dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow x_C = \rho_C\cos\varphi_C = 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$ et $y_C = 4$

$C\,(4,4,0)_{B_{ca}}$

$\rho_D = 5$ , $\varphi_D = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow x_D = \rho_D\cos\varphi_D = 0$ et $y_D = \rho_D\sin\varphi_D = 5$

$D\,(0,5,6)_{B_{ca}}$

c) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans la base cartésienne. Calculer alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left|\begin{matrix}2\\-2\\3\end{matrix}\right._{B_{ca}} - \left|\begin{matrix}2\\2\\-3\end{matrix}\right._{B_{ca}} = \left|\begin{matrix}0\\-4\\6\end{matrix}\right._{B_{ca}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \left|\begin{matrix}0\\5\\6\end{matrix}\right._{B_{ca}} - \left|\begin{matrix}4\\4\\0\end{matrix}\right._{B_{ca}} = \left|\begin{matrix}-4\\1\\6\end{matrix}\right._{B_{ca}}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (0)(-4) + (-4)(1) + (6)(6) = -4 + 36 = 32$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} = \left|\begin{matrix}0\\-4\\6\end{matrix}\right._{B_{ca}} \times \left|\begin{matrix}-4\\1\\6\end{matrix}\right._{B_{ca}} = \left|\begin{matrix}-24-6\\-24-0\\0-16\end{matrix}\right._{B_{ca}} = \left|\begin{matrix}-30\\-24\\-16\end{matrix}\right._{B_{ca}} = -2\left|\begin{matrix}15\\12\\8\end{matrix}\right._{B_{ca}}$$

**2- Question de cours :**

Soit deux repères cartésiens $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ et $\mathcal{R}'\left(O',\overrightarrow{e'_x},\overrightarrow{e'_y},\overrightarrow{e'_z}\right)$, et un point $M$ mobile dans $\mathcal{R}'$.

**Donner** la définition de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis, liées à $M$, dans le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Toutes les précisions nécessaires à l'exactitude de ces définitions seront prises en compte dans la notation.

$$\vec{v}_e(M, R'/R) = \vec{v}(O' \in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \times \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \vec{a}(O' \in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \times \left[\vec{\Omega}(R'/R) \times \overrightarrow{O'M}\right] + \left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R \times \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_c(M, R'/R) = 2\,\vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{v}(M/R')$$

avec $\vec{\Omega}(R'/R)$, vecteur rotation de $R'/R$